Интерполяция функций сплайном третьего порядка

Пусть на некотором отрезке в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ нам известны значения некоторой функции $f(x)$, а именно $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$.

Требуется построить интерполирующую функцию $F(x)$, такую, что она принимает в указаных точках те же значения, т.е. $F(x_0) = y_0$, $F(x_1) = y_1$, … $F(x_N) = y_N$.

Геометрически это значит, что нужно найти кривую $y = F(x)$ определенного типа, проходящую через систему заданных точек. В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений. В случае интерполяции сплайном кривая $F(x)$ состоит из кусочков, а именно, на каждом из отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$ функция $F(x)$ является кубическим полиномом

$$F_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3,$$
$$F = F_1 \text{ на интервале } [x_0, x_1],$$
$$F = F_2 \text{ на интервале } [x_1, x_2],$$
$$\dots,$$
$$F = F_N \text{ на интервале } [x_{N-1}, x_N].$$

При этом, на каждом из отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$ коэффициенты полинома a_k, b_k, c_k, d_k разные.

Чтобы узнать эти коэффициенты, кроме условия непрерывности функции на полиномы налагают дополнительные условия, а именно непрерывности первой и второй производной функции $F(x)$, а также равенства вторых производных функции на концах отрезка $[x_0;\ x_N]$, т.е.

$$F_{k-1}(x_{k-1}) = F_k(x_{k-1}),$$
$$F'_{k-1}(x_{k-1}) = F'_k(x_{k-1}),$$
$$F''_{k-1}(x_{k-1}) = F''_k(x_{k-1}),$$
$$\text{при } k = 2, 3, \dots, N,$$
$$F''(x_0) = 0,\ F''(x_N) = 0.$$

Найдем выражения для производных функций F_k

$$F'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2,$$
$$F''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k).$$

Подставив их в условия непрерывности получим систему:

$$a_1 - b_1h_1 + c_1h_{12} - d_1h_{13} = y_0,$$
$$a_k = y_k,\ k = 1, 2, \dots, N,$$
$$a_{k-1} = a_k - b_kh_k + c_kh_{k2} - d_kh_{k3},\ k = 2, 3, \dots, N,$$
$$b_{k-1} = b_k - 2c_kh_k + 3d_kh_{k2},\ k = 2, 3, \dots, N,$$
$$c_{k-1} = c_k - 3d_kh_k,\ k = 2, 3, \dots, N,$$
$$c_1 - 3d_1h_1 = 0,$$
$$c_N = 0.$$

Здесь введено обозначение $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Введем еще $l_k = (y_k - y_{k-1})/h_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, а также $c_0 = 0$.

Упомянутую выше систему уравнений можно решить с помощью некоторых преобразований, на которых я не буду останавливаться. При этом используется так называемый метод прогонки.

Вводятся прогоночные коэффициенты

$$\delta_1 = -h_2/\big(2(h_1 + h_2)\big),$$
$$\lambda_1 = 3(l_2 - l_1)/\big(2(h_1 + h_2)\big),$$
$$\delta_{k-1} = -h_k/(2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}),\ k = 3, 4, \ldots, N,$$
$$\lambda_{k-1} = (3l_k - 3l_{k-1} - h_{k-1}\lambda_{k-2})/(2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}).$$

Далее следует найти коэффициенты c_k по формулам обратной прогонки

$$c_{k-1} = \delta_{k-1}c_k + \lambda_{k-1},\ k = N, N-1, N-2, \ldots, 2.$$

После нахождения c_k нужно найти b_k и d_k по формулам

$$b_k = l_k + (2c_k h_k + h_k c_{k-1})/3,\ k = 1, 2, \ldots, N,$$
$$d_k = l_k + (c_k - c_{k-1})/(3h_k),\ k = 1, 2, \ldots, N.$$